

Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

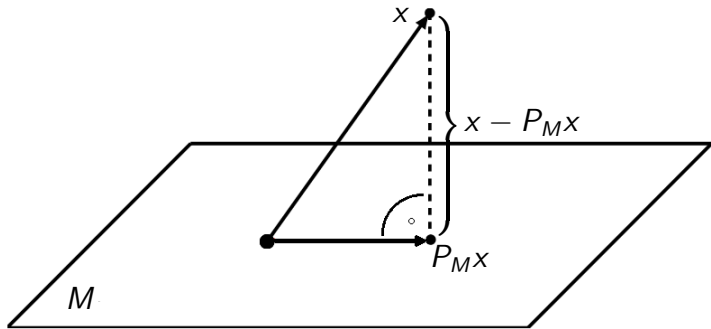
Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 8

Rzutu ortogonalny II

math.uwb.edu.pl/~zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

H – ustalona przestrzeń Hilberta. **Rzut ortogonalny** $x \in H$ na podprzestrzeń $M \subseteq H$ to $P_M x \in M$ taki, że $x - P_M x \perp M$.



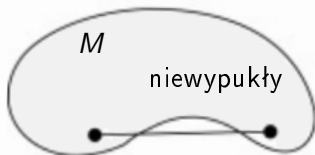
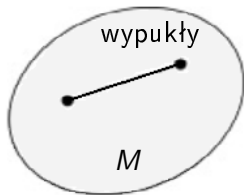
Problem: Czy rzut ortogonalny $P_M x$ istnieje?

Rysunek sugeruje, że

$$\|x - P_M x\| = \text{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Powyższe infimum realizuje się w dokładnie jednym punkcie, jeśli M jest domkniętym zbiorem wypukłym!

Zbiór $M \subseteq H$ jest **wypukły**, gdy $\forall x, y \in M \forall \lambda \in [0, 1] \lambda x + (1 - \lambda)y \in M$,
czyli gdy każdy odcinek o końcach w M cały zawiera się w M :

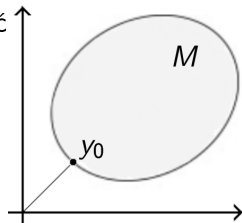


Tw. (O odległości od zbioru wypukłego)

Niech H przestrzeń Hilberta. Dla dowolnego domkniętego zbioru wypukłego $M \subseteq H$ oraz punktu $x \in H$ istnieje dokładnie jeden $y_0 \in M$ taki, że $\|x - y_0\| = \text{dist}(x, M)$.

Dowód: “Przesuwając” zbiór M możemy założyć że $x = 0$. Wtedy twierdzenie przyjmuje postać:
W domkniętym i wypukłym zbiorze M istnieje dokładnie jeden element o minimalnej normie:

$$\exists! y_0 \in M \quad \|y_0\| = \inf_{y \in M} \|y\|.$$



“Istnienie”. Połóżmy $d := \inf_{y \in M} \|y\|$ i niech $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ taki, że $\|y_n\| \rightarrow d$. Wystarczy pokazać, że $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy, bo wtedy na mocy zupełności H i domkniętości M , ciąg ten jest zbieżny do pewnego $y_0 \in M$ i wtedy $\|y_0\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = d$.

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 & \stackrel{\text{tożsamość}}{\text{równoległoboku}} 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - \|y_n + y_m\|^2 \\ & = 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4\left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2 \quad \begin{cases} \frac{y_n + y_m}{2} \in M \\ \text{bo } M \text{ wypukły} \end{cases} \\ & \leq 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4d^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0. \end{aligned}$$

“Jednoznaczność”. Jeżeli $y_1, y_2 \in M$ takie, że $\|y_1\| = \|y_2\| = d$, to powyższy rachunek pokazuje, że $y_1 = y_2$. Rzeczywiście

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\|^2 & \stackrel{\text{tożsamość}}{\text{równoległoboku}} 2\|y_1\|^2 + 2\|y_2\|^2 - \|y_1 + y_2\|^2 \\ & = 2\|y_1\|^2 + 2\|y_2\|^2 - 4\left\| \frac{y_1 + y_2}{2} \right\|^2 \quad \begin{cases} \frac{y_1 + y_2}{2} \in M \\ \text{bo } M \text{ wypukły} \end{cases} \\ & \leq 2\|y_1\|^2 + 2\|y_2\|^2 - 4d^2 = 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0. \end{aligned}$$



Tw. O istnieniu rzutu ortogonalnego

Dla domkniętej podprzestrzeni $M \subseteq H$ przestrzeni Hilberta H oraz punktu $x \in H$ istnieje rzut ortogonalny $y = P_M x$. Co więcej,

$$\|x - y\| = \text{dist}(x, M) \quad (1)$$

i rzut y jest przez tę równość wyznaczony jednoznacznie.

Dowód: Skoro M jest zbiorem wypukłym, to na mocy poprzedniego twierdzenia istnieje dokładnie jeden $y \in M$ spełniający (1).

Musimy pokazać, że $x - y \perp M$. Niech $z \in M$. Dla $t \in \mathbb{F}$ mamy

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &\stackrel{(1)}{\leq} \min_{y+tz \in M} \|x - (y + tz)\|^2 = \|(x - y) + tz\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x - y, tz \rangle + |t|^2 \|z\|^2. \end{aligned}$$

Stąd $0 \leq |t|^2 \|z\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x - y, tz \rangle$ dla $t \in \mathbb{F}$. Kładąc $t = se^{i\varphi}$, gdzie $s \in \mathbb{R}$ i $\varphi := \arg \langle x - y, z \rangle$ nierówność ta przyjmuje postać

$$0 \leq s^2 |e^{i\varphi}|^2 \|z\|^2 - 2s \operatorname{Re}(e^{-i\varphi} \langle x - y, z \rangle) = s^2 \|z\|^2 - 2s |\langle x - y, z \rangle|.$$

Czyli funkcja kwadratowa $f(s) = s^2\|z\|^2 - 2s|\langle x - y, z \rangle|$ jest nieujemna. Skoro f ma miejsce zerowe dla $s = 0$, to jej wyróżnik $\Delta = 4|\langle x - y, z \rangle|^2$ musi wynosić zero, czyli $\langle x - y, z \rangle = 0$, tzn. $x - y \perp z$. ■

Wn. (Rozkład przestrzeni Hilberta) Dla dowolnej domkniętej podprzestrzeni M przestrzeni Hilberta H mamy

$$H = M \oplus M^\perp,$$

czyli $\forall x \in H \exists! y \in M \exists! z \in M^\perp x = y + z$.

Dowód: Niech $x \in H$. Połóżmy $y := P_M x$ oraz $z := x - y$. Wtedy $x = y + z$ oraz z definicji rzutu mamy $y \in M$ i $x - y \perp M$, tzn. $z \in M^\perp$. Aby pokazać jednoznaczność tego rozkładu załóżmy, że $x = y' + z'$ dla pewnych $y' \in M$ i $z' \in M^\perp$. Wtedy

$$y - y' = z' - z$$

oraz $y - y' \in M$ i $z - z' \in M^\perp$. Ale $M \cap M^\perp = \{0\}$ (bo zero jest jedynym wektorem izotropowym). Zatem $y = y'$ oraz $z = z'$. ■

Uw. Tezę powyższego wniosku można też zapisać jako

$$1 = P_M + P_{M^\perp},$$

gdzie 1 jest operatorem identycznościowym na H oraz P_M jest odwzorowaniem $H \ni x \rightarrow P_M x \in M \subseteq H$. W szczególności, jeśli P_M jest rzutem ortogonalnym na domkniętą podprzestrzeń M , to $1 - P_M$ jest rzutem na jej dopełnienie ortogonalne M^\perp :

$$P_{M^\perp} = 1 - P_M.$$

Wn. $(M^\perp)^\perp = M$ dla domkniętej podprzestrzeni $M \subseteq H$.

Dowód: $P_{(M^\perp)^\perp} = 1 - P_{M^\perp} = 1 - (1 - P_M) = P_M$. ■

Stw. Rzut ortogonalny P_M jest ograniczonym operatorem liniowym o normie 1 (chyba, że $M = \{0\}$ i wtedy $P_M \equiv 0$).

Dowód:

“Liniowość”. Niech $x, y \in H$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Chcemy wykazać, że $P_M(\alpha x + \beta y) = \alpha P_M x + \beta P_M y$. Z definicji $P_M(\alpha x + \beta y)$ to jedyny element w M taki, że $(\alpha x + \beta y) - P_M(\alpha x + \beta y) \perp M$. Wystarczy zatem pokazać, że wektor $\alpha P_M x + \beta P_M y$ ma te same własności. Jasne, że $\alpha P_M x + \beta P_M y \in M$ bo M przestrzeń liniowa. Z liniowości (w pierwszym argumencie) iloczynu skalarnego, dla $z \in M$ mamy

$$\begin{aligned} \langle (\alpha x + \beta y) - (\alpha P_M x + \beta P_M y), z \rangle &= \alpha \langle x - P_M x, z \rangle + \beta \langle y - P_M y, z \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

bo $x - P_M x$ oraz $y - P_M y$ są ortogonalne do M z definicji rzutu. Zatem $(\alpha x + \beta y) - (\alpha P_M x + \beta P_M y) \perp M$.

“Ograniczoność”. Dla dowolnego $x \in H$ mamy

$$\begin{aligned} \|P_M x\|^2 &\leq \|P_M x\|^2 + \|P_{M^\perp} x\|^2 = \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{Pitagoras}} = \|P_M x + P_{M^\perp} x\|^2 \\ &\stackrel{1=P_M+P_{M^\perp}}{=} \|x\|^2. \end{aligned}$$

Stąd $\|P_M\| \leq 1$. Jeżeli $P_M \neq 0$, to $M \neq \{0\}$ i istnieje $x \in M$ o normie 1. Skoro $P_M x = x$, to $\|P_M x\| = \|x\| = 1$, czyli $\|P_M\| \geq 1$. Zatem $\|P_M\| = 1$. ■

Tw. Niech $P : H \rightarrow H$ liniowy idempotent, tzn. $P^2 = P$. NWSR:

- 1 P jest rzutem ortogonalnym (na PH),
- 2 P jest samosprężony, tzn. $\forall_{x,y \in H} \langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$ ($P = P^*$),
- 3 P jest kontrakcją, tzn. $\|P\| \leq 1$ (dokładniej $\|P\| = 1$ lub $P = 0$).

Dowód: (1) \Rightarrow (2). Dla $x, y \in H$ mamy

$$\begin{aligned} \langle Px, y \rangle &\stackrel{y=Py+(1-P)y}{=} \langle Px, Py \rangle + \langle Px, (1-P)y \rangle \stackrel{PH \perp \stackrel{(1-P)H}{=} PH}{=} \langle Px, Py \rangle \\ &\stackrel{PH \perp \stackrel{(1-P)H}{=} PH}{=} \langle Px, Py \rangle + \langle (1-P)x, Py \rangle \stackrel{x=P_x+(1-P)x}{=} \langle x, Py \rangle. \end{aligned}$$

(2) \Rightarrow (3). Dla dowolnego $x \in H$ mamy

$$\|Px\|^2 = \langle Px, Px \rangle \stackrel{(2)}{=} \langle P(Px), x \rangle \stackrel{P^2=P}{=} \langle Px, x \rangle \stackrel{N.Schwartza}{\leq} \|Px\| \cdot \|x\|.$$

(3) \Rightarrow (1). Potrzebujemy pokazać, że $x - Px \perp PH$ dla $x \in H$.



Hint: Niech $x \in \ker P$ oraz $y \in PH$. Wtedy dla $t \in \mathbb{F}$ dostajemy

$$\|y\|^2 = \|Py + tPx\|^2 = \|P(y + tx)\|^2 \stackrel{\|P\| \leq 1}{\leq} \|y + tx\|^2 = \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} t \langle x, y \rangle + |t|^2 \|x\|^2.$$

Stąd $f(s) = 2s|\langle x, y \rangle| + s^2\|x\|^2 \geq 0$, co implikuje, że $\langle x, y \rangle = 0$.

Niech $H = L^2(\mu)$, gdzie (Ω, Σ, μ) przestrzeń z miarą.

Prz. (Mnożenie przez funkcję charakterystyczną)

Jeśli $A \in \Sigma$, to $M := \{f \in L^2(\mu) : f \text{ zeruje się poza } A\}$ jest domkniętą podprzestrzenią H , a rzut ortogonalny z $L^2(\mu)$ na M jest operatorem mnożenia przez funkcję charakterystyczną $\mathbb{1}_A$ zbioru A :

$$P_M f = \mathbb{1}_A \cdot f, \quad f \in L^2(\mu)$$

Prz. (Warunkowa wartość oczekiwana)

Jeśli \mathcal{F} σ -podalgebra Σ , to $M := \{f \in L^2(\mu) : f \text{ jest } \mathcal{F}\text{-mierzalna}\}$ jest domkniętą podprzestrzenią H , a rzut ortogonalny z $L^2(\mu)$ na M w rachunku prawdopodobieństwa nazywany jest **warunkową wartością oczekiwaną pod warunkiem \mathcal{F}**

$$P_M f = E(f, \mathcal{F}), \quad f \in L^2(\mu).$$

- (1) $P_M f$ jest \mathcal{F} -mierzalna dla każdego $f \in L^2(\mu)$,
- (2) $\int_A P_M f d\mu = \int_A f d\mu$ dla $A \in \mathcal{F}$ i $f \in L^2(\mu)$.

